

Nilai Harap dan Ketidakpastian Posisi Elektron Ion Helium (He^+) dalam Fungsi Gelombang Ruang Posisi pada Bilangan Kuantum $n \leq 4$

Expectation Value and Uncertainty of Helium Ion (He^+) Electron Position in the Position Space Wave Function at Quantum Numbers $n \leq 4$

Zidan Afidah^{1*}, Bambang Supriadi¹, Rif'ati Dina Handayani¹

¹Program Studi Pendidikan Fisika, Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan, Universitas Jember, Kampus Jember, Jember, Jawa Timur, Indonesia 68121

Email: *afidahzidan7@gmail.com; bambangsupriadi.fkip@unej.ac.id; rifati.fkip@unej.ac.id

Received: 14th February 2025; **Revised:** 5th May 2025; **Accepted:** 21th May 2025

Abstrak – Ion Helium positif He^+ terdiri dari dua proton dan satu elektron orbital sehingga dapat dipandang sebagai atom hidrogenik. Pemanfaatan Ion He^+ sangat potensial terutama dalam pengembangan perangkat spintronik dan sterilisasi berbasis plasma. Penelitian ini bertujuan untuk mengetahui nilai harap dan ketidakpastian posisi elektron ion He^+ . Penentuan nilai harap dan ketidakpastian posisi dilakukan dengan perhitungan analitik melalui pendekatan metode Schrodinger khususnya bagian radial pada bilangan kuantum $n \leq 4$ dan perhitungan numerik dengan bantuan program simulasi. Hasil penelitian didapatkan bahwa nilai harap dan ketidakpastian posisi dipengaruhi oleh bilangan kuantum utama dan orbital n, l . Semakin besar bilangan kuantum utama n maka nilai harap posisi elektron semakin menurun dan ketidakpastian posisi elektron meningkat. Sedangkan peningkatan bilangan kuantum orbital l memberi dampak nilai yang cenderung turun. Penelitian ini sesuai dengan hipotesis de Broglie tentang sifat dualisme dan prinsip ketidakpastian dalam tinjauan ruang posisi.

Kata kunci: Nilai harap; ketidakpastian; ruang posisi; Helium; bilangan kuantum.

Abstract – The positive helium ion He^+ consists of two protons and one orbital electron to be viewed as a hydrogenic atom. The use of He^+ ions has very potential, especially in the development of spintronic devices and plasma-based sterilization. This study aims to determine the expected value and position uncertainty of He^+ ion electrons. Determination of the expected value and position uncertainty is done by analytical calculation through the Schrodinger method approach, especially the radial part at quantum number $n \leq 4$, and numerical calculation with the help of a simulation program. The results showed that the main quantum number and orbital n, l influence the expectation value and position uncertainty. The greater the main quantum number n , the expectation value of electron position decreases and the uncertainty of electron position increases. At the same time, the increase in the orbital quantum number l has an impact on the value, which tends to go down. This research is in accordance with de Broglie's hypothesis about the nature of dualism and the principle of uncertainty in the review of position space.

Keywords: Expectation value; uncertainty; position space; Helium; quantum numbers.

1. Pendahuluan

Ion helium adalah atom helium terionisasi yang melepaskan sebuah elektron sehingga hanya memiliki satu elektron orbital. Atom Helium termasuk dalam golongan VIIIA (gas mulia) yang terdiri dari 2 proton, 2 neutron, dan 2 elektron yang menempati kulit $1s^2$. Konfigurasi elektron atom Helium paling stabil sehingga cenderung kecil untuk membentuk ikatan yang berkaitan dengan sifat tidak reaktif dan energi ionisasi yang tinggi [1]. Sebagai gas mulia, Helium memiliki beberapa sifat yang berbeda dengan unsur-

unsur golongan lain. Sifat fisika atom Helium yaitu berwujud gas tidak berwarna, tidak berbau, tidak berasa, sukar terbakar ketika kondisi normal dan titik didih sangat rendah [2]. Berdasarkan sifat-sifat tersebut Helium dimanfaatkan untuk mengembunkan gas-gas lain seperti nitrogen dan metana, balon udara, mendinginkan magnet superkonduktor dalam *Magnetic Resonance Imaging* (MRI) dan *Nuclear Magnetic Resonance* (NMR) [1], [3]. Helium terionisasi yang melepaskan sebuah elektron akan membentuk ion Helium positif (He^+) yang hanya memiliki satu elektron orbital. Atom-atom atau ion yang berelektron tunggal diasumsikan berperilaku seperti atom hidrogen [4]. Salah satu pemanfaatan ion Helium yaitu dalam pengembangan perangkat spintronik. Hasil menyatakan bahwa penggunaan iradiasi ion Helium pada skyrmion magnetik mampu menghasilkan kestabilan skyrmion [5]. Selain itu, ion helium dapat membunuh mikroorganisme pada buah manggis sehingga dapat digunakan sebagai alat sterilisasi berbasis plasma [6]. Pemanfaatan ini tidak lepas dari tinjauan subatomik termasuk elektron.

Teori mekanika kuantum muncul dilatarbelakangi oleh hipotesa de Broglie pada tahun 1924 yang mempertimbangkan sifat kesimetrian alam. Hipotesa tersebut menyatakan bahwa jika gelombang dapat bersifat partikel maka partikel seharusnya juga dapat dipandang sebagai gelombang atau disebut dualisme gelombang-partikel [7]. Partikel subatomik seperti elektron, proton, dan neutron memiliki sifat dualisme gelombang-partikel [8]. Posisi elektron dalam atom bersifat probabilistik karena berubah sebagai fungsi posisinya. Kedudukan elektron dalam suatu atom tidak dapat ditentukan dengan pasti, yang dapat ditentukan adalah probabilitas menemukan elektron sebagai fungsi jarak dari inti atom [9]. Menurut interpretasi Born, nilai absolut kuadrat dari fungsi gelombang, $|\psi_{r,t}|^2$ menunjukkan rapat probabilitas elektron berada di sekitar inti. Dalam mekanika kuantum, posisi sebuah elektron hanya dapat digambarkan secara statistik [4]. Persamaan Schrodinger dalam ruang posisi dapat memberikan informasi mengenai energi kinetik, energi potensial, dan fungsi gelombang [10]. $\psi_{(r)}$ adalah Fungsi gelombang Schrodinger merupakan solusi dari persamaan Schrodinger non relativistik bebas waktu (tunak) yang dapat memberikan informasi sistem kuantum secara menyeluruh [11].

Pada atom hidrogen potensial elektron tidak sepenuhnya sentral sehingga keadaan yang perlu diperhitungkan adalah solusi bagian radial. Fungsi gelombang radial dapat menentukan radius peredaran dari elektron atom hidrogenik yang mungkin dengan bilangan kuantum yang mempengaruhi adalah n (utama) dan l (orbital) [12]. Bilangan kuantum dapat diidentifikasi dari simpul fungsi gelombang. Semakin besar n maka semakin banyak simpul dan semakin kompleks bentuk orbital [13], [14].

Fungsi gelombang radial secara matematis dituliskan dalam persamaan berikut.

$$R_{nl}(r) = N_{nl} e^{-\frac{zr}{na_0}} \left(\frac{2zr}{na_0}\right)^l L_{n+1}^{2l+1} \left(\frac{2zr}{na_0}\right) \quad (1)$$

dengan

$$N_{nl} = -\left(\frac{2z}{na_0}\right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{(n-l-1)!}{2n[(n+l)!]^3}} \quad (2)$$

adalah konstanta normalisasi fungsi radial [15].

Persamaan R_{nl} merupakan fungsi gelombang radial dalam ruang posisi yang ternormalisasi [16], [17]. Ruang tersebut adalah sistem yang memandang partikel diam (statis) di berbagai titik dalam ruang tiga dimensi dengan 3 koordinat posisi (x, y, z) yang saling tegak lurus [18]. Fungsi gelombang ternormalisasi pada atom hidrogenik (berelektron tunggal) seperti ditampilkan pada Tabel 1. Fungsi gelombang radial atom hidrogenik ternormalisasi tersebut dapat diperoleh dengan menerapkan fungsi Laquerre dan fungsi Laguerre terasosiasi [15].

Gagasan Max Born tentang rapat probabilitas elektron dapat digunakan untuk menentukan nilai ekspektasi dan ketidakpastiannya. Nilai harap posisi disimbolkan dengan $\langle r \rangle$ disebut juga nilai harapan merupakan nilai rata-rata dari sekumpulan data statistika kebolehjadian posisi elektron [19]. Persamaan matematis nilai harap elektron dalam atom dituliskan sebagai Persamaan (3) [20].

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \int_0^\infty r |\Psi(r, t)|^2 dv \\ &= \int_0^\infty \Psi_{(r,t)}^* r \Psi_{(r,t)} dV \end{aligned} \quad (3)$$

Dalam koordinat bola, nilai ekspektasi juga dapat dirumuskan dengan Persamaan (4).

$$\langle r \rangle = \int_0^\infty r^3 |R_{nl}(r)|^2 dr \quad (4)$$

Tabel 1. Fungsi gelombang radial ternormalisasi atom hidrogenik pada $n \leq 4$.

n	l	Orbital	$R_{nl}(r); \rho \equiv \left(\frac{2Zr}{na_0}\right)^3$
1	0	1s	$2\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0}$
2	0	2s	$\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}(2-\rho)e^{-Zr/a_0}$
2	1	2p	$\frac{1}{4\sqrt{6}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\rho e^{-Zr/a_0}$
3	0	3s	$\frac{1}{9\sqrt{3}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}(6-6\rho+\rho^2)e^{-Zr/3a_0}$
3	1	3p	$\frac{1}{27\sqrt{6}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}(4-\rho)\rho e^{-Zr/3a_0}$
3	2	3d	$\frac{1}{81\sqrt{30}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\rho^2 e^{-Zr/3a_0}$
4	0	4s	$\frac{1}{96}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}(24-36\rho+12\rho^2-\rho^3)e^{-Zr/4a_0}$
4	1	4p	$\frac{1}{32\sqrt{15}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}(20-10\rho+\rho^2)e^{-Zr/4a_0}$
4	2	4d	$\frac{1}{96\sqrt{5}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}(6-\rho)\rho^2 e^{-Zr/4a_0}$
4	3	4f	$\frac{1}{96\sqrt{35}}\left(\frac{Z}{a_0}\right)^{\frac{3}{2}}\rho^3 e^{-Zr/3a_0}$

Konsekuensi sifat dualisme pada partikel elementer memunculkan ketidakpastian pengukuran yang bukan disebabkan oleh keterbatasan alat ukur, tetapi merupakan karakteristik mendasar dari realitas kuantum. Posisi merupakan salah satu besaran fisis yang memiliki ketidakpastian pengukuran [21]. Nilai ketidakpastian posisi merupakan standar deviasi yang diperoleh dengan mengambil akar varian [13]. Sehingga persamaan maatematis untuk menentukan nilai ketidakpastian posisi (Δr) meninjau dari Persamaan (4) diperoleh nilai harap kuadrat posisi sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \langle r^2 \rangle &= \int_0^\infty \Psi_{(r,t)}^* r^2 \Psi_{(r,t)} dV \\ \langle r^2 \rangle &= \int_0^\infty r^4 |R_{nl}(r)|^2 dr \end{aligned} \quad (5)$$

Ketidakpastian posisi ditentukan oleh hasil Persamaan (4) dan (5) sebagai berikut.

$$\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} \quad (6)$$

Hal tersebut didukung oleh penelitian yang menunjukkan bahwa ketidakpastian posisi dan momentum pada atom hidrogenik dapat dianalisis menggunakan metode harap nilai kuadrat posisi dan momentum [22]. Harap nilai posisi dalam atom hidrogen untuk keadaan dasar $n = 1$ menunjukkan bahwa elektron paling mungkin berada pada jarak rata-rata sebesar radius Bohr. Selain itu, harap nilai momentum menunjukkan distribusi momentum elektron yang terkuantisasi, semakin meningkat pada tingkat energi yang lebih tinggi. Fakta ini sejalan dengan teori mekanika kuantum yang menyatakan bahwa baik posisi maupun momentum elektron dalam atom hidrogen tidak dapat ditentukan dengan pasti, melainkan hanya dalam distribusi probabilitas [23].

Berdasarkan uraian diatas, untuk mengkaji lebih lanjut perilaku elektron pada ion He^+ dalam ruang posisi dilakukan penelitian lebih lanjut melalui penentuan nilai harap dan ketidakpastian posisi elektron untuk mengetahui nilai rata-rata kebolehjadian posisi elektron dalam atom dan menganalisis pernyataan tidak mungkin dapat menentukan posisi suatu partikel dengan presisi yang tidak terbatas pada fungsi gelombang ion Helium dalam tinjauan ruang posisi.

2. Metode Penelitian

Penelitian ini menggunakan metode studi pustaka dengan mengembangkan teori-teori yang ada sebelumnya. Data yang diperoleh berupa nilai harap dan ketidakpastian posisi elektron ion helium (He^+) pada bilangan kuantum utama $n \leq 4$. Berdasarkan data yang diperoleh dilakukan analisis hubungan antara bilangan kuantum utama dengan nilai harap dan ketidakpastian posisinya. Penentuan nilai harap dan ketidakpastian posisi elektron menggunakan fungsi gelombang radial dalam Tabel 1. Prosedur dalam penelitian ini dimulai dari menentukan jari-jari Bohr keadaan dasar ion helium melalui Persamaan (7).

$$a_0 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{Zme^2} \quad (7)$$

dengan m adalah massa tereduksi yang diperoleh dari Persamaan (8).

$$m = \frac{m_e m_I}{m_e + m_I} \quad (8)$$

Selanjutnya menentukan harap posisi elektron pada fungsi gelombang ternormalisasi pada masing-masing bilangan kuantum n menggunakan persamaan berikut.

$$\langle r \rangle = \int_0^r r^3 |R_{nl}(r)|^2 dr \quad (9)$$

dengan $R_{nl}(r)$ adalah fungsi gelombang radial elektron ion helium yang disajikan pada Tabel 1.

Ketidakpastian posisi elektron ion helium (Δr) ditentukan menggunakan standar deviasi dari posisi elektron yaitu persamaan:

$$\Delta r = \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle} \quad (10)$$

dengan $\langle r^2 \rangle$ merupakan harap kuadrat posisi yang diperoleh melalui persamaan:

$$\langle r^2 \rangle = \int_0^r r^4 |R_{nl}(r)|^2 dr \quad (11)$$

Penggunaan batas integrasi $0 - r$ menggunakan asumsi bahwa nilai harap dan ketidakpastian posisi atom dalam elektron dapat ditentukan melalui radius tertentu dari inti dalam orbit elektron. Radius yang paling sempit digunakan merupakan jari-jari atom Bohr untuk ion He^+ yaitu a_0 dan bertambah besar hingga jari-jari orbit elektron yang diperkenankan [16], yaitu.

$$r = n^2 a_0 \quad (12)$$

dengan demikian dapat diketahui distribusi elektron ion He^+ dalam berbagai keadaan n, l .

Perhitungan di atas merupakan langkah penentuan nilai harap dan ketidakpastian posisi secara analitik. Dalam penelitian ini perhitungan juga dilakukan secara numerik dengan bantuan *software* MATLAB R2021b dengan menggunakan metode integrasi Simpson yang telah divalidasi menggunakan perbandingan dengan hasil penelitian terdahulu yaitu penelitian oleh Pratikha dkk. (2022) untuk nilai harap dan Saputra dkk. (2019) untuk nilai ketidakpastian posisi [22], [24].

3. Hasil dan Pembahasan

Penelitian dilakukan sesuai dengan prosedur penelitian melalui tahap validasi antara perhitungan analitik dengan perhitungan numerik serta penelitian terdahulu menggunakan perbandingan. Hasil validasi data ketidakpastian posisi Δr dengan penelitian oleh Saputra et al. (2019) pada atom Deuterium dengan $n \leq 3$. Δr pada keadaan $n, l = 1,0$ pada interval $r = 0 - a_0$ dalam penelitian terdahulu menghasilkan $\Delta r_{10} = 1,771511487782686 \times 10^{-11} m$ sedangkan dalam hasil simulasi pada penelitian ini menghasilkan $\Delta r_{10} = 1,771511487782686 \times 10^{-11} m$ dan secara analitik diperoleh $\Delta r_{10} = 1,77738151148778 \times 10^{-11} m$. Selisih antara perhitungan analitik dan numerik dengan penelitian terdahulu telah sesuai dengan selisih kurang dari $0,01 \times 10^{-11}$ sehingga dapat dikategorikan valid.

Ion He^+ adalah atom hidrogenik yaitu berperilaku seperti atom hidrogen karena berelektron tunggal pada kulit $n = 1$. Ion He^+ terbentuk dari atom Helium yang melepaskan satu elektron dan menyisakan satu elektron orbital sehingga bermuatan positif. Nomor atom Z dari ion Helium adalah 2 sesuai dengan jumlah proton.

Massa ion He^+ merupakan massa tereduksi gabungan massa inti dengan massa elektron. Massa tereduksi ion He^+ diperoleh melalui Persamaan (8) sebagai berikut.

$$m = \frac{(6,6951562 \times 10^{-27} kg) \times (9,10938215 \times 10^{-31} kg)}{(6,6951562 \times 10^{-27} kg) + (9,10938215 \times 10^{-31} kg)}$$

$$= 9,1081429 \times 10^{-31} kg$$

Besar massa tereduksi lebih kecil dibandingkan dengan massa elektron. Hasil serupa dalam penelitian pada ion Lithium (Li^{2+}) dimana massa tereduksi besarnya lebih kecil selisih 2×10^{-33} dengan massa elektron [24]. Berdasarkan Persamaan (7) dengan pendekatan teoritis Bohr, ion He^+ dalam keadaan dasar ($n = 1$) memiliki jari-jari sebesar $a_0 = 2,644 \times 10^{-11} m$. Jika dibandingkan dengan penelitian jari-jari atom deuterium dengan yang memiliki nomor atom $Z = 1$ sebesar $a_0 = 5,306 \times 10^{-11} m$ [22] maka jari-jari ion He^+ dua kali lebih kecil dibandingkan dengan atom Deuterium. Nomor atom berbanding terbalik dengan jari-jari atom karena semakin banyak proton maka semakin kecil jarak inti atom dengan elektron terluarnya. Massa atom yang berkurang juga mempengaruhi jari-jari atom karena jumlah neutron dan gaya ikat dalam inti semakin besar dengan semakin kecilnya jari-jari orbital elektron [24].

Perilaku elektron yang dapat diketahui melalui fungsi gelombang radial ruang posisi diantaranya yaitu harap dan ketidakpastian posisi elektron dalam atom. Fungsi gelombang radial ternormalisasi merupakan penyelesaian fungsi radial menggunakan persamaan Schrodinger tidak bergantung waktu dalam koordinat bola. Fungsi gelombang radial ternormalisasi bergantung pada bilangan kuantum utama (n) serta bilangan kuantum orbital (l).

Nilai harap posisi elektron dalam ion He^+ pada bilangan kuantum utama $n \leq 4$ dihitung secara analitik menggunakan Persamaan (9) dengan batas integrasi dari 0 hingga $r = a_0, 2a_0, \dots, 16a_0$. Nilai harap posisi elektron pada $(n, l) = (1, 0)$ menggunakan batas $0 - a_0$ adalah:

$$\begin{aligned} \langle r \rangle &= \int_0^{a_0} r^3 |R_{10}|^2 dr \\ &= \int_0^{a_0} r^3 \left| 2 \left(\frac{2}{a_0} \right)^{3/2} e^{-2r/a_0} \right|^2 dr \\ &= \frac{32}{a_0^3} \int_0^{a_0} r^3 e^{-4r/a_0} dr \\ &= \frac{32}{a_0^3} \left[\left(-r^3 \frac{a_0}{4} - 3r^2 \frac{a_0^2}{16} - 6r \frac{a_0^3}{64} - 6 \frac{a_0^4}{256} \right) e^{-\frac{4r}{a_0}} \right]_0^{a_0} \\ &= \frac{32}{a_0^3} \left[\left(\frac{-0,5546875 a_0^4}{2,71828183^4} \right) - (-0,0234375 a_0^4) \right] = 0,42489741056 a_0 \end{aligned}$$

Proses perhitungan yang sama dilakukan untuk $r = 2a_0, 3a_0, \dots, 16a_0$ pada masing-masing keadaan n dan l . Pada Tabel 2. diperoleh nilai harap posisi elektron ion He^+ pada $n \leq 4$ melalui perhitungan numerik sebagai berikut.

Tabel 2. Nilai harap posisi elektron He^+ pada $n \leq 4$.

r	$n = 1$		$n = 2$			$n = 3$			$n = 4$		
	$l = 0$	$l = 0$	$l = 1$	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$	
$\times a_0$											
$1a_0$	0,42489	0,02262	0,04141	0,00592	0,01321	0,00040	0,00240	0,00568	0,00023	0,00000	
$4a_0$	0,74993	2,09995	2,02191	0,23170	0,25679	0,89471	0,09076	0,12659	0,32851	0,07319	
$9a_0$	0,74999	2,99804	2,49919	5,08621	5,07176	4,78010	0,85239	0,94666	1,56534	3,71332	
$16a_0$	0,74999	2,99999	2,49999	6,74081	6,24441	5,24835	9,40827	9,44265	9,30414	8,61031	

Penentuan nilai harap posisi elektron $\langle r \rangle$ menunjukkan nilai yang meningkat dan menuju konstan pada interval yang lebih besar. Pada $(n, l) = (1, 0)$ nilai harap posisi konstan pada interval 0 hingga $r = 4a_0 - 9a_0$. Hal ini menunjukkan bahwa elektron akan lebih mudah ditemukan pada jarak r tersebut. Sedangkan semakin besar bilangan kuantum utama n maka nilainya semakin kecil menunjukkan bahwa elektron akan semakin sulit ditemukan pada interval posisi yang lebih dekat dari inti pada $n < 1$. Pada bilangan kuantum utama n yang sama dengan bilangan kuantum orbital l yang meningkat menghasilkan nilai harap posisi elektron yang bervariasi sesuai dengan bentuk orbital. Pada $l = 0$ atau orbital s (paling

sederhana) bentuk orbital bola simetri yang menunjukkan bahwa elektron memiliki densitas yang sama, sedangkan pada $l = 1$ atau orbital p densitas sebaran elektron tidak merata, melainkan terkonsentrasi dalam dua daerah yang terbagi sama besar dan terletak pada dua sisi berhadapan dari inti yang terletak di tengah [25]. Sehingga nilai harap posisi bervariasi sesuai dengan keadaan n dan l yang mempengaruhinya.

Hasil penelitian sesuai dengan penelitian oleh Supriadi dkk. (2023) dengan tinjauan ruang momentum menunjukkan bahwa nilai ekspektasi momentum elektron ion He^+ pada (n, l) tertentu dengan interval yang lebih besar cenderung menghasilkan nilai yang menurun dan menuju konstan [26]. Selain itu, pada interval yang sama dihasilkan nilai harap momentum yang semakin besar seiring bertambahnya bilangan kuantum utama n . Hasil nilai harap elektron ion He^+ pada ruang momentum dan ruang posisi adalah berbanding terbalik. Sesuai dengan penafsiran Born tentang fungsi gelombang dan prinsip ketidakpastian Heisenberg yang menyatakan bahwa posisi dan momentum adalah pasangan variabel kanonik penggambaran yang dihubungkan secara matematis melalui Transformasi Fourier [9], [27].

Ketidakpastian posisi elektron diperoleh dengan mengambil akar varian [13]. Pada Tabel 2 telah memuat hasil harap posisi elektron. Sehingga perhitungan yang dilakukan selanjutnya adalah nilai harap kuadrat posisi yang dapat diperoleh melalui Persamaan (11) dengan batas integrasi $r_1 = 0$ dan $r_2 = a_0, 2a_0, \dots, 16a_0$. Nilai harap kuadrat posisi elektron pada $(n, l) = (1, 0)$ pada batas $0 - a_0$ adalah:

$$\begin{aligned}\langle r^2 \rangle &= \int_0^{a_0} r^4 |R_{10}|^2 dr \\ &= \int_0^{a_0} r^4 \left| 2 \left(\frac{2}{a_0} \right)^{3/2} e^{-2r/a_0} \right|^2 dr \\ &= \frac{32}{a_0^3} \int_0^{a_0} r^4 e^{-4r/a_0} dr \\ &= \frac{32}{a_0^3} \left[-r^4 \frac{a_0}{4} e^{-\frac{4r}{a_0}} - 4r^3 \frac{a_0^2}{16} e^{-\frac{4r}{a_0}} - 12r^2 \frac{a_0^3}{64} e^{-\frac{4r}{a_0}} - 24r \frac{a_0^4}{256} e^{-\frac{4r}{a_0}} - 24 \frac{a_0^5}{1024} e^{-\frac{4r}{a_0}} \right]_0^{a_0} \\ &= \frac{32}{a_0^3} \left[\left(\frac{-0,8046875a_0^5}{2,71828183^4} \right) - (-0,0234375a_0^5) \right] = 0,27837229984a_0^2\end{aligned}$$

Dengan demikian, nilai ketidakpastian posisi yang merupakan standar deviasi posisi r diperoleh menggunakan Persamaan (10) sebagai berikut.

$$\begin{aligned}\Delta r &= \sqrt{\langle r^2 \rangle - \langle r \rangle^2} \\ &= 0,3128 a_0 = 0,08270094174 \times 10^{-10} m\end{aligned}$$

Proses perhitungan yang sama dilakukan untuk $r = 2a_0, 3a_0, \dots, 16a_0$ pada masing-masing keadaan n dan l . Sesuai dengan perhitungan analitik, diperoleh perhitungan ketidakpastian posisi elektron ion He^+ pada $n \leq 4$ secara numerik pada Tabel 3 berikut.

Tabel 3. Ketidakpastian posisi elektron He^+ pada $n \leq 4$.

r	$n = 1$		$n = 2$		$n = 3$		$n = 4$			
	$l = 0$	$l = 0$	$l = 1$	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 0$	$l = 1$	$l = 2$	$l = 3$
$\times 10^{-10} m$										
$1a_0$	0,08270	0,02773	0,04751	0,01413	0,02724	0,00495	0,00898	0,01793	0,00379	0,00025
$4a_0$	0,11443	0,33537	0,27242	0,18210	0,19580	0,38303	0,12049	0,15201	0,25315	0,13226
$9a_0$	0,11449	0,32305	0,29516	0,76115	0,69429	0,51319	0,53294	0,56985	0,74939	0,94122
$16a_0$	0,11449	0,32382	0,29561	0,65593	0,64287	0,52393	1,35478	1,28123	1,11758	0,78865

Nilai ketidakpastian posisi menunjukkan hasil yang berbanding lurus dengan nilai harap pada pembahasan diatas. Nilai ketidakpastian posisi semakin konstan pada interval yang lebih besar. Hasil pada Tabel 3 selaras dengan teori jari-jari orbital Bohr yang terkuantifikasi yaitu $r_n = n^2 a_0$ dengan semakin besar n maka jarak antara elektron dengan inti akan semakin jauh dan ukuran orbital semakin besar [20]. Berdasarkan sifat dualisme yang dimiliki elektron maka pada jarak yang lebih jauh dan orbital yang lebih luas akan lebih sulit menentukan posisi elektron dengan akurat. Sesuai dengan prinsip komplementaris de

Broglie yaitu gelombang dan partikel komplementer satu sama lain [16]. Maka ketidakpastian pengukuran posisi elektron yang semakin besar menunjukkan sifat partikel yang semakin hilang dan sifat gelombang yang semakin ditampakkan. Hubungan ini dijelaskan melalui persamaan matematis $\lambda = \frac{h}{p}$ dengan λ adalah panjang gelombang sebagai karakteristik gelombang dan p adalah momentum sebagai karakteristik partikel [4]. Bilangan kuantum n yang meningkat juga mempengaruhi energi elektron. Energi elektron semakin kecil ketika tingkat eksitasi (lama partikel bergerak) semakin tinggi [24].

Kesebandingan nilai harap posisi dengan ketidakpastian posisi dan hubungan berbanding terbalik antara harap posisi dan momentum selaras dengan prinsip ketidakpastian. Hubungan ketidakpastian posisi-momentum adalah formulasi matematis dari prinsip ketidakpastian mekanika kuantum yang menggambarkan karakteristik mekanika kuantum dan menyatakan keterbatasan untuk melakukan pengukuran pada suatu sistem tanpa mengganggunya [28].

4. Kesimpulan

Nilai harap dan ketidakpastian posisi elektron Ion He^+ dipengaruhi oleh bilangan kuantum utama n dan bilangan kuantum orbital l . Pada interval yang lebih besar nilai keduanya meningkat hingga menuju konstan. Pada n yang lebih besar dengan interval jarak r yang sama, nilai ekspektasi semakin kecil menunjukkan elektron akan sulit ditemukan pada interval tersebut. Pada n yang lebih besar dengan $r_n = n^2 a_0$, nilai ketidakpastian posisi semakin besar artinya sulit menentukan posisi elektron yang lebih akurat pada jarak yang lebih jauh dan orbital yang lebih luas. Hasil penelitian ini sesuai dengan hipotesa de Broglie tentang sifat dualisme dan prinsip ketidakpastian dalam tinjauan ruang posisi.

Ucapan Terima Kasih

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Fakultas Keguruan dan Ilmu Pendidikan Universitas Jember atas fasilitas yang diberikan selama penelitian dan penulisan. Segala kekurangan dalam artikel ini sepenuhnya menjadi tanggung jawab penulis.

Pustaka

- [1] Z. Fitri, *Kimia Unsur Golongan Utama*, 1st ed. Banda Aceh: Syiah Kuala University Press, 2019.
- [2] D. Evilina, *Ensiklopedia Materi dan Kimia Unsur*. Semarang: Alprin Finishing, 2019.
- [3] C. Rillo *et al.*, “Enhancement of the Liquefaction Rate in Small-Scale Helium Liquefiers Working Near and above the Critical Point,” *Phys. Rev. Appl.*, vol. 3, no. 5, pp. 3–7, 2015, doi: 10.1103/PhysRevApplied.3.051001.
- [4] B. Supriadi, F. K. A. Anggraeni, N. Faridah, and E. M. Jannah, *Fisika Kuantum*. Jember: UPT Penerbitan Universitas Jember, 2022.
- [5] R. Juge *et al.*, “Helium Ions Put Magnetic Skyrmions on the Track,” *Nano Lett. ACS Publ.*, vol. 21, no. 7, pp. 2989–2996, 2021.
- [6] W. D. Saputro, A. R. Wibowo, A. Maulidiyah, and Y. Hendrawan, “Rancang Bangun Alat Sterilisasi Buah Manggis Berbasis Cold Atmospheric Plasma (CAP),” *J. Ilm. Teknol. Pertan. Agrotechno*, vol. 3, no. 2, p. 313, 2019, doi: 10.24843/jitpa.2018.v03.i02.p01.
- [7] K. S. Krane, *Modern Physics*, 4th ed. Hoboken: John Wiley & Sons, Inc, 2020.
- [8] N. Andelita, I. W. Sudiarta, and D. W. Kurniawidi, “Penerapan Algoritma Kuantum Variational Quantum Eigensolver (VQE) untuk Menentukan Energi Keadaan Dasar Dimer Helium,” *J. Fis.*, vol. 11, no. 2, pp. 53–59, 2021, doi: 10.15294/jf.v11i2.30192.
- [9] S. Sutopo, *Pengantar Mekanika Kuantum: Transformasi Pemikiran dari Fisika Klasik ke Fisika Kuantum*, 1st ed. Malang: Media Nusa Creative, 2023.
- [10] F. Rusydi, *Buku Ajar Fisika Kuantum Fungsi Gelombang, Energi Potensial, dan Operator*. Surabaya: Airlangga University Press, 2022.
- [11] Sunarmi, “Distribusi Probabilitas Radial Elektron Sistem Molekul Dalam Pengaruh Potensial Kratzer Dengan Metode Parametrik NikiForov-Uvarov,” *J. Inov. Pendidik. dan Sains*, vol. 4, no. 3, pp. 151–158, 2023.
- [12] A. M. Juwono, *Pendahuluan Fisika Kuantum*, 1st ed. Malang: UB Press, 2017.
- [13] D. J. Griffiths and D. F. Schroeter, *Introduction to Quantum Mechanics*, 3rd ed. Cambridge:

- Cambridge University Press, 2018.
- [14] G. Pandu, R. K. Pingak, A. Z. Johannes, and Z. S. Ngara, “Kajian Sifat Radial Ion Hidrogenik Menggunakan Polinomial Laguerre,” *Bul. Fis.*, vol. 23, no. 2, pp. 78–84, 2022.
- [15] B. Supriadi, A. Z. L. Kinanti, E. E. Putri, A. R. Rosyidan, D. Natasha, and C. Sutantri, “Application Of Laguerre Polynomial Equation In Solving Schrodinger Equation Radial Section Of Helium Ion,” *IOSR J. Appl. Phys.*, vol. 16, no. 1, pp. 22–31, 2024, doi: 10.9790/4861-1601012231.
- [16] N. Nurlina and H. Bancong, *Fisika Kuantum Untuk Pemula: Panduan Mudah untuk Memahami Teori Fisika Kuantum*, 1st ed. Makassar: LPP UNISMUH MAKASSAR, 2020.
- [17] N. Nuryono, *Kimia Anorganik: Struktur dan Ikatan*. Yogyakarta: Gajah Mada University Press, 2018.
- [18] C. L. Arora, *S. Chand's Success Guide (Questions and Answers): Refresher Course in Physics Volume II (LPSPE)*. New Delhi: S. Chand Publishing, 2022.
- [19] V. Sugiyono, *Mekanika Kuantum*, 1st ed. Yogyakarta: CAPS, 2023.
- [20] L. Subagyo and A. Nuryadin, *Pengantar Fisika Kuantum*, 1st ed. Samarinda: Mulawarman University Press, 2018.
- [21] A. Halim and F. Herliana, *Pengantar Fisika Kuantum*, 1st ed. Banda Aceh: Syiah Kuala University Press, 2020.
- [22] B. H. Saputra, B. Supriadi, and S. H. B. Prastowo, “Ketidakpastian Momentum Atom Deuterium Menggunakan Pendekatan Ketidakpastian Heisenberg Pada Bilangan Kuantum $n \leq 3$,” *Semin. Nas. Pendidik. Fis.* 2019, vol. 4, no. 1, pp. 57–64, 2019.
- [23] R. A. Sani and M. Kadri, *Fisika Kuantum*, 1st ed. Jakarta: Bumi Aksara, 2017.
- [24] A. R. Pratikha, B. Supriadi, and R. D. Handayani, “Electron’s Position Expectation Values and Energy Spectrum of Lithium Ion ($\text{Li}^{(2+)}$) on Principal Quantum Number $n \leq 3$,” *J. Penelit. Pendidik. IPA*, vol. 8, no. 1, pp. 252–256, 2022, doi: 10.29303/jppipa.v8i1.840.
- [25] B. Supriadi and L. Nuraini, *Fisika Atom: Teori & Aplikasinya*. Jember: UPT Percetakan & Penerbitan Universitas Jember, 2019.
- [26] B. Supriadi, H. Mardhiana, W. I. Kristiawan, D. Kamalia, and I. K. Sari, “Expected Value of Helium Ion Electron Momentum in Momentum Space with Primary Quantum Numbers $n \leq 3$,” *J. Penelit. Pendidik. IPA*, vol. 9, no. 10, pp. 8467–8472, 2023, doi: 10.29303/jppipa.v9i10.3861.
- [27] N. A. Ridha *et al.*, *Fisika Kuantum*, 1st ed. Padang: CV. Gita Lentera, 2024.
- [28] J. S. Dehesa and D. Puertas-Centeno, “Multidimensional hydrogenic states: position and momentum expectation values,” *J. Phys. B At. Mol. Opt. Phys.*, vol. 54, no. 14pp, 2021.